Modélisation des Signaux à Bande Etroite

Exercice 1 : Signaux analytiques

1. Quels sont les signaux analytiques associés aux signaux réels suivants ?

$$x(t)=cos(2\pi f_0 t)\ ,\ y(t)=\left[1+m\cos(2\pi Ft)\right]cos(2\pi f_0 t)$$

où m, f_0 et F sont des constantes avec $F < f_0$.

2. Représenter schématiquement $x(t)$ et $y(t)$, leurs spectres et le spectre de leurs signaux analytiques associés.

Exercice 2 : Transformée de Hilbert

1. Déterminer et représenter la transformée de Hilbert d'une fonction rectangulaire d'amplitude A.

2. Donner l'expression du signal analytique correspondant et de son spectre.

Exercice 3 : Autocorrélation de la transformée de Hilbert

Montrer que l'autocorrélation du signal $x(t)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est identique à l'autocorrélation de la transformée de Hilbert de ce signal.

Exercice 4 : Signal analytique et transformée de Hilbert

1. Déterminer le signal analytique associé au signal réel x(t) de transformée de Fourier :

$$X(f)=\frac{1}{2}exp(-a|f|), a \in \mathbb{R}^{*+}$$

2. En déduire x(t) et sa transformée de Hilbert.

Communications Analogiques

Exercice 1 : Modulations d'amplitude

Soit le signal modulant $m(t)$ et le signal porteuse d'amplitude A et de fréquence f_0.

Les questions qui suivent doivent être résolues en considérant, d'une part une modulation d'amplitude sans porteuse, et d'autre part une modulation d'amplitude avec porteuse de ce signal.

1. Rappeler l'expression du signal modulé $x(t)$ et déterminer sa transformée de Fourier.

On suppose que $m(t)$ est un processus aléatoire stationnaire au sens large de densité spectrale de puissance $S_m(f)$ supposé nul hors de la bande $[-B, B]$ et de puissance P_m.

2. Déterminer l'expression de la densité spectrale de $x(t)$.

3. Déterminer l'expression de l'enveloppe complexe de $x(t)$ et la densité spectrale de puissance correspondante.

4. Quelle est la bande de fréquence D occupée par le signal modulé ?

5. Quelle la puissance transmise P ?

Remarque préalable pour l'étude des performances dans les deux exercices qui suivent

Pour comparer les performances, on se place dans le cas où le bruit sur le canal est additif, blanc, centré de densité spectrale de puissance égale à $N_0/2$ dans la bande occupée par le signal transmis $x(t)$. On calcule le rapport signal sur bruit ρ après démodulation en fonction du rapport signal sur bruit ρ_0 que l'on obtiendrait en bande de base si on disposait de la même puissance transmise et d'une bande $[-B, B]$ utile à la transmission sans distorsion du message :

$$\rho_0 = \frac{P}{2B \times N_0 / 2} = \frac{P}{BN_0}$$

Exercice 2 : Calcul des performances en AM

Soit $x(t)$ un signal modulé en amplitude avec porteuse, d'amplitude A, par $m(t)$ autour de f_0.

On suppose que le signal reçu est la somme du signal émis et d'un bruit blanc $n(t)$ de densité spectrale de puissance $N_0/2$.

1. Décrire le filtre de réception.

2. Déterminer l'expression du signal à démoduler (bruit compris) après filtrage, $r(t)$. Préciser la densité spectrale du bruit.

3. En déduire l'expression de l'enveloppe complexe de $r(t)$. Faire apparaître dans cette expression les composantes en phase et quadrature par rapport à f_0 du bruit et préciser leur densité spectrale de puissance.

4. Montrer qu'en négligeant les termes de second ordre : $|r_b(t)|^2 \approx A^2\left(1 + 2km(t) + \frac{2}{A}p(t)\right)$

5. Montrer que l'expression du signal $s(t)$ obtenu en sortie du détecteur d'enveloppe est : $s(t) = |r_b(t)| \approx A\left(1 + km(t) + \frac{1}{A}p(t)\right)$

6. Quelle est l'expression de $s(t)$ après filtrage passe haut ? Quel est le rapport signal sur bruit finalement obtenu ? Le comparer au cas en bande de base. Conclure.

Exercice 3 : Modulation BLU et étude de performance

Partie A : ***Expression d'un signal modulé en BLU***

Soit un signal d'information $m(t)$ de bande $(-B, B)$ modulé en Bande Latérale Unique Supérieure (BLS) par une porteuse $p(t)$ de fréquence f_0 et d'amplitude A ; soit $p(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$.

Le signal modulé obtenu est noté $s(t)$.

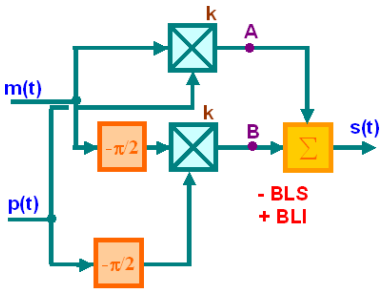
A1. Rappeler (sans calcul) le principe, les intérêts et les inconvénients, d'une modulation Bande Latérale Unique en comparant par rapport à une modulation d'amplitude sans porteuse. Donner un exemple d'application pratique (préciser les fréquences mises en jeu).

A2. Montrer que l'expression analytique de la transformée de Fourier du signal modulé en BLS, notée S(f), par un signal modulant quelconque est donnée par :

$$S(f) = A\{M^+(f - f_0) + M^-(f + f_0)\} \quad \mathrm{S(f)} = \mathrm{A}\left\{\mathrm{M^+(f\text{-}f_0)} + \mathrm{M^-(f + f_0)}\right\}$$

Aide :

- Le principe fonctionnel du modulateur BLS est rappelé sur la figure ci-dessous (où $k = 1$ pour simplifier les expressions) ;



- Si $u(t)$ est l'entrée d'un déphaseur pur de $-\pi/2$ et $v(t)$ est la sortie, on démontre que leurs transformées de Fourier respectives $U(f)$ et $V(f)$ sont reliées par : $V(f) = -j\, U(f)\, Sgn(f)$ où $Sgn(f)$ est la fonction « signe ».

- On note les transformées de Fourier $M^+(f)$ et $M^-(f)$ qui correspondent à $M(f)$ situé respectivement dans les fréquences positives et dans les fréquences négatives.

A3. En déduire les expressions analytiques de la transformée de Fourier :

- Du signal analytique correspondant à $s(t)$, soit $Z_s(f)$;
- De l'enveloppe complexe associée à $s(t)$, soit $S_b(f)$.

Représenter $M(f)$, $S(f)$, $Z_s(f)$ et $S_b(f)$.

Indication pour la représentation schématique :

Sans perte de généralités, et donc, pour et seulement pour les représentations graphiques, on suppose que la transformée de Fourier $M(f)$ de $m(t)$ est un triangle d'amplitude 1.

A4. En déduire que l'enveloppe complexe $s_b(t)$ est égale au signal analytique $z_m(t)$ de $m(t)$ à un facteur constant près que l'on précisera.

Déterminer alors l'expression analytique de $s_b(t)$ en fonction de $m(t)$ et de sa transformée de Hilbert notée $\hat{m}(t)\,\hat{\mathrm{m}}(\mathrm{t})$.

A5. Déterminer finalement l'expression de $s(t)$ en fonction de m(t) et de $\hat{\mathrm{m}}(\mathrm{t})$.

Partie B : ***Etude de Performance de la modulation BLU***

On utilise pour transmettre un message $m(t)$ de bande $2B$ (en tenant compte des fréquences positives et négatives) une modulation BLU supérieure sur une porteuse de fréquence f_0 et d'amplitude A. On note $s(t)$ le signal modulé. Ce signal est soumis à un bruit $b(t)$ additif, blanc, centré, de densité spectrale de puissance $N_0/2$. On note $r(t) = s(t) + b(t)$ le signal reçu. On note $y(t)$ le signal en sortie du filtre de réception.

B1. Quelles sont les caractéristiques précises du filtre de réception ?

B2. Déterminer l'expression analytique de la densité spectrale de puissance de la partie $w(t)$ de $y(t)$ due au bruit $b(t)$.

On note $p(t)$ et $q(t)$ les composantes en phase et en quadrature de $w(t)$ par rapport à f_0. Donner l'expression de $w(t)$ en fonction de $p(t)$ et $q(t)$.

B3. Déterminer les expressions de la densité spectrale de puissance de $p(t)$ et $q(t)$, et les représenter. En déduire la puissance de $p(t)$ et $q(t)$.

B4. En supposant que l'enveloppe complexe de $s(t)$ est donnée par $s_b(t) = A\{m(t) + j\hat{m}(t)\}$ $\mathrm{s_b(t) = A\{m(t) + j\hat{m}(t)\}}$, avec $\hat{m}(t) = \mathrm{TH}[m(t)]$, déterminer en fonction de $m(t)$, $p(t)$ et $q(t)$, l'expression de l'enveloppe complexe $y_b(t)$ par rapport à f_0 de $y(t)$.

B5. Rappeler le schéma de principe d'un démodulateur synchrone.

En déduire l'expression du signal $d(t)$ en sortie d'un démodulateur synchrone.

B6. En déduire l'expression, en fonction de A, P_m, B et N_0, du rapport signal sur bruit en sortie du récepteur.

B7. Déterminer le gain de modulation par rapport à une transmission en bande de base utilisant la même puissance pour transmettre.

B8. Conclure en présentant un tableau indiquant de façon synthétique l'expression générale du signal transmis, la bande occupée, le gain de modulation dans les cas suivants : bande de base, modulation d'amplitude sans et avec porteuse, modulation de fréquence, modulation à bande latérale unique (supérieure et inférieure).

Les résultats présentés ici ne sont pas à démontrer obligatoirement : certains cas ont été traités en travaux dirigés, les autres se retrouvent rapidement.

Exercice 4 : Calcul des performances en FM

Soit $x(t)$ un signal modulé en fréquence par $m(t)$ autour de f_0, et d'amplitude A. On note $\phi(t) = 2\pi k \int^t m(u)du$. On suppose que ce signal est perturbé par un bruit additif, centré, blanc, de densité spectrale de puissance $N_0/2$. On admet que le démodulateur effectue l'opération suivante : si $e(t) = R(t)exp(j\psi(t))$ est l'entrée, le signal en sortie est $s(t) = d\psi(t)/dt$.

1. Décrire le filtre de réception.

2. Montrer que le signal en sortie de ce filtre a pour décomposition en phase et quadrature par rapport à f_0 :

$$x_b(t) = A\,exp(j\phi(t)) + p(t) + jq(t) = R(t)exp(j\psi(t))$$

où $p(t)$ et $q(t)$ sont deux processus aléatoires stationnaires au sens large dont on déterminera la densité spectrale de puissance.