MA387
Théorie de l'information et codage
TP

Yann Kieffer Nicolas Barbot

31 août 2021

1 Introduction

La détermination des performances de systèmes de communication est une tâche difficile car elle dépend de nombreux paramètres et fait intervenir des compétences variées (réseaux, traitement du signal, électronique...). Une résolution analytique est souvent impossible sans approximation, et l'expérimentation est longue et peu généralisable. La simulation informatique peut alors représenter un bon compromis entre les deux solutions précédentes.
L'objectif de ce TP est de modéliser une chaîne de transmission en bande de base utilisant un code correcteur d'erreur et d'en déterminer les performances par simulation. Le code considéré est le code de Hamming $(7, 4)$ systématique. Les performances seront comparées aux valeurs théoriques dans le but de valider le modèle utilisé.
Le compte rendu du TP (en version informatique) doit être envoyé sur Chamilo au plus tard 7 jours après la date du TP. Un travail préparatoire est demandé (section 2.2) et sera inclus dans le compte rendu. Le plagiat est sanctionné par une pénalité de 10 points sur la note totale. La présentation du compte rendu est notée sur 2 points.

2 Modélisation

2.1 Description

Le modèle de la chaîne de transmission est présenté sur la figure 1.

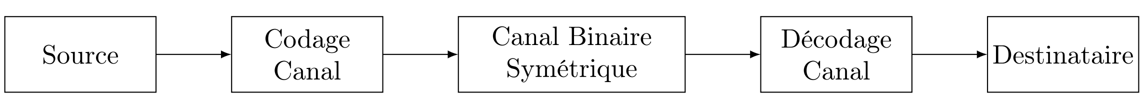

Figure 1 – Modèle de la chaîne de transmission

Source : le message est émis par une source binaire. Les symboles émis sont indépendants et identiquement distribués et ne peuvent prendre que 2 valeurs (0 et 1) avec les probabilités respectives p_0 et p_1. Par la suite on suppose que l'opération de codage de source est effectuée de manière parfaite ainsi $p_0 = p_1 = 1/2$.

Codeur de canal : Les symboles de la source sont encodés à l'aide d'un code en bloc. On considère le code de Hamming($N = 7, K = 4$) systématique dans la suite de l'étude. Ce code accepte en entrée un bloc de 4 bits et produit en sortie un bloc de 7 bits.

Canal : L'émetteur et le récepteur sont reliés par un canal de transmission. Ce canal n'est pas parfait et introduit des perturbations sur le message reçu (le message reçu peux être différent du message envoyé). On considère dans un premier temps, un canal binaire symétrique. Ce canal modifie la valeur du bit envoyé avec une probabilité f (le bit est donc correctement transmis avec une probabilité $1-f$).

Décodeur canal : Le décodeur peut réaliser la détection d'erreur ou la correction d'erreur. Par la suite, on suppose un décodage à maximum de vraisemblance. Ainsi le décodeur renvoie le mot de code le plus proche du mot reçu.

Destinataire : le destinataire est chargé de collecter les symboles issus du décodeur.

2.2 Préparation

On donne la matrice génératrice systématique du code de Hamming ainsi que sa matrice de parité :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. (1 point) Décrire l'algorithme de décodage lorsque le code est utilisé en détection d'erreur et en correction d'erreur.
2. (2 points) Déterminer l'expression de la probabilité d'erreur bloc p_B ainsi que de la probabilité d'erreur bit p_b lorsque le code est utilisé en code correcteur d'erreur sur un canal binaire symétrique de probabilité f.

3 Simulation

La performance d'une transmission est souvent évaluée en terme de probabilité d'erreur binaire BER (Binary Error Rate) ou de probabilité d'erreur bloc WER (Word Error Rate) lorsqu'on s'intéresse à la performance du décodeur canal.
Afin d'évaluer ces deux critères, il est souvent nécessaire de réaliser une simulation en utilisant la méthode de Monte Carlo. L'estimation de ces deux quantités peut alors être effectuée en comparant la chaîne reçue avec la chaîne envoyée (que l'on considère connue).

1. (1 point) Écrire un programme permettant de générer un vecteur de N symboles issus d'une source binaire de probabilité p_0.
2. (2 points) Ajouter le canal binaire symétrique de probabilité f et comparer la séquence à l'entrée et à la sortie du canal. En répétant l'opération un grand nombre de fois estimer le taux d'erreur binaire au niveau du récepteur.
3. (2 points) Écrire un programme permettant d'encoder un vecteur de K bits en utilisant le code de Hamming$(7,4)$ systématique.
4. (3 points) Réaliser ensuite le décodeur et vérifier les fonctions de détection d'erreur et de correction d'erreur (faire varier le poids du motif d'erreur ainsi que la position des erreurs).
5. (4 points) Insérer le couple codeur/décodeur dans la chaîne de transmission. Évaluer le WER et le BER de la liaison en réalisant une boucle pour transmettre un grand nombre de mots de code. Tracer l'évolution du WER ainsi que du BER pour différentes valeurs de f (entre 0 et 0.5). Expliquer le comportement du BER lorsque la probabilité d'erreur est élevée.
6. (3 points) Pour f donné (0.05 par exemple), placer le point (R, p_b) sur un graphique présentant la probabilité d'erreur en fonction du rendement. Ajouter la limite de Shannon définie par :

$$R(p_b) = \frac{C}{1 - H_2(p_b)} \tag{1}$$

   Conclure sur l'efficacité du code de Hamming par rapport à la limite prédite par Shannon.

7. (Bonus) Remplacer le canal binaire symétrique par un canal AWGN. On utilise une modulation BPSK (+1/-1) pour envoyer les symboles sur le canal. En émission, ajouter un modulateur permettant de convertir les bits générés par la source en symboles d'amplitude $\{+1/-1\}$. En réception, ajouter un démodulateur, basé sur un comparateur à seuil, permet d'effectuer la conversion inverse. Indiquer la valeur optimale du seuil de décision permettant de minimiser la probabilité d'erreur. Tracer la probabilité d'erreur en fonction du rapport E_b/N_0. Comparer vos résultats avec les performances d'une transmission BPSK sans codage de probabilité d'erreur (voir cours SC311) :

$$p_b = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{2}$$